CURS 1978-79

Problemes de la XV Olimpíada Matemàtica.
Primera fase (Catalunya), 1978-79

Primera sessió. Abril de 1979.

15C1.–Sigui el polinomi $p(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$. Demostreu que per a tot n natural més gran que 2, es compleix:

a) $p(n) = 6h$, on h és un natural.

b) $h + 1$ no és primer.

15C2.–Un tetràedre de l'espai euclidià E_3 té dos parells d'arestes oposades ortogonals. Demostreu que el tercer parell també ho és.

15C3.–La fórmula de de Moivre, vàlida per a exponents naturals, és

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha.$$

És aplicable aquesta fórmula amb exponents racionals? En cas negatiu, tracteu d'obtenir-ne una generalització resolent l'equació

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{p/q} = \cos x + i\sin x.$$

15C4.–Tenim tres bosses i cada una conté n boles numerades $1, 2, \ldots, n$. S'extreu a l'atzar una bola de cada bossa. Siguin x, y, z els números de les boles tretes. Calculeu la probabilitat que $x + y = z$.

Segona sessió. Abril de 1979.

15C5.–Siguin γ_1 i γ_2 dues circumferències exteriors i r una recta exterior a totes dues que i les deixa en un mateix semiplà. Determineu els punts P d'aquesta recta que tenen la propietat que les tangents traçades des de P a les circumferències formin amb r angles iguals.

15C6.–Proveu que per a tot enter positiu n, el nombre $a = 3^n - 2n^2 - 1$ és divisible per 8. Demostreu també que si n no és múltiple de 3, el nombre a definit abans, és divisible per 24.

15C7.–Trobeu una funció f definida a l'interval $[-3, 0]$, contínua, derivable i positiva, tal que

a) Per $x = -1$ té un extrem relatiu.

b) L'àrea limitada pel gràfic de la funció, l'eix d'abscisses i les rectes $x = -3$ i $x = 0$ val 6 unitats d'àrea.

c) $f(-1) = 1$.

15C8.–Trobeu el valor de $(1 + i\sqrt{3})^n - (1 - i\sqrt{3})^n$, essent n un nombre natural múltiple de 3.

Problemes de la XVI Olimpíada Matemàtica. Segona fase (Espanya), 1978-79

Primera sessió. Juny de 1979.

15E1.–Calculeu l'àrea de la intersecció de l'interior de l'el·lipse

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$$

amb el cercle limitat per la circumferència $(x-2)^2+(y-1)^2=5$.

15E2.–Cert professor d'Oxford, destinat als serveis de criptografia de l'espionatge britànic, paper interpretat per Dirk Bogarde en una pel·lícula, recruta el personal proposant petits exercicis d'atenció, com ara llegir mentalment una paraula al revés. Freqüentment ho fa amb el seu propi nom: SEBASTIAN s'ha de llegir NAITSABES.

Es pregunta si hi ha algun moviment del pla o de l'espai que transformi un d'aquests mots en l'altre, tal com apareixen escrits. I si s'hagues dit AVITO, com un cert personatge d'Unamuno? Expliqueu raonadament la resposta.

15E3.–Demostreu la igualtat

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

15E4.–Si z_1, z_2 són les arrels de l'equació amb coeficients reals $z^2+az+b=0$, proveu que $z_1^n+z_2^n$ és un nombre real per a qualsevol valor natural de n. En el cas particular de l'equació $z^2-2z+2=0$, expresseu, en funció de n aquesta suma.

Segona sessió. Juny de 1979.

15E5.–Calculeu la integral definida

$$\int_2^4 \sin\left((x-3)^3\right) dx.$$

15E6.–Es col·loquen tres boles en una urna pel següent procediment: es tira una moneda tres vegades i s'introdueix, cada vegada que surt cara una bola blanca a l'urna, i cada vegada que surt creu, una bola negra. Extraiem una bola de la urna, anotem el seu color i la hi retornem. Si repetim el procés quatre vegades, quina és la probabilitat d'haver obtingut quatre boles blanques?

15E7.–Proveu que el volum d'un pneumatic (tor) és igual al volum d'un cilindre la base del qual és una secció meridiana d'aquell i que té per altura la longitud de la circumferència formada pels centres de les seccions meridianes.

15E8.–Donal el polinomi

$$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots + 1001x^{500},$$

expresseu el valor numèric de la seva derivada d'ordre 325 al punt $x = 0$.

CURS 1979-80

Problemes de la XVI Olimpíada Matemàtica.
Primera fase (Catalunya), 1979-80

Primera sessió.

16C1.–Sabent que 75 bous mengen en 12 dies l'herba d'un prat de 60 àrees, i que 81 bous mengen en 15 dies l'herba d'un altre prat de 72 àrees, calculeu quants bous caldran per menjar en 18 dies l'herba d'un prat de 96 àrees. Se suposa que en els tres prats l'herba té la mateixa altura en el moment d'entrar-hi els bous i que continua creixent uniformement després que hi hagin entrat.

16C2.–Donada la paràbola $y = ax^2$ i dos dels seus punts A i B d'abscisses $x_1 < x_2$, es demana:

a) Calculeu, en funció de x_1, x_2 l'àrea del triangle ABC, essent C el punt de la paràbola en el qual la tangent és paral·lela a la recta AB.

b) Aplicant reiteradament el procés anterior, calculeu l'àrea del segment de paràbola limitat per la corda AB.

16C3.–Siguin z i w dos nombres complexos que compleixen la relació

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

on a, b, c, d són reals. Demostreu que si $ad - bc > 0$, llavors les parts imaginàries de z i w tenen el mateix signe.

(Observació: Calculeu $w - \overline{w}$, on $\overline{w}$ és el conjugat de w).

16C4.–A $\mathbb{R}^3$ es considera el tetràedre $DABC$.

a) Demostreu que les rectes que uneixen cada un dels vèrtexs del tetràedre amb el baricentre de la cara oposada, es tallen en un punt G.

b) Demostreu que els vectors que uneixen el punt D amb cada un dels baricentres de les cares del tetràedre que passen per D, són una base de l'espai vectorial dels vectors lliures de $\mathbb{R}^3$.

Segona sessió.

16C5.–A partir d'un significat geomètric de la integral definida, calculeu

$$\int_{-2}^{0} \sqrt{-x^2 - 2x}\, dx.$$

16C6.–Demostreu que si els costats d'un triangle estan en progressió geomètrica, la raó està compresa entre

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{i} \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

16C7.–Al congrés d'un partit polític hi participen 2000 afiliats. Un periodista observa que, dels presents en una sessió, el $12.1212\ldots\%$ són dones, i el $23.423423\ldots\%$ pertanyen a la branca radical. Es demana el nombre de participants que falten en aquesta sessió.

16C8.–Es considera la successió recurrent

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2 \qquad \text{amb} \quad a_1 = 14.$$

Demostreu per inducció que, per a tot $n \geq 1$, el nombre

$$\sqrt{3(a_n^2 - 4)}$$

és un enter divisible per 4. Com a aplicació, demostreu que existeixen infinits triangles tals que les mesures dels costats són enters consecutius i l'àrea és també un nombre enter.

Problemes de la XVI Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya), 1979-80

Primera sessió.

16E1.–D'entre tots els triangles que tenen un costat de 5 m de longitud i l'angle oposat de 30°, determineu el d'àrea màxima, calculant el valor dels altres dos angles i l'àrea del triangle.

16E2.–Una urna conté els vots per a l'elecció de dos candidats A i B. Se sap que el candidat A té 6 vots segurs i el candidat B en té 9. Trobeu la probabilitat que, en efectuar l'escrutini, sempre vagi per davant el candidat B.

16E3.–Demostreu que si a_1, a_2, ..., a_n són nombres reals positius, aleshores

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Digueu quan és vàlida la igualtat.

16E4.–Trobeu la funció $f(x)$ que compleix l'equació

$$f'(x) + x^2 f(x) = 0$$

sabent que $f(1) = e$. Representeu gràficament aquesta funció i calculeu la tangent en el punt de la corba d'abscissa 1.

Segona sessió.

16E5.–Demostreu que si x és tal que

$$x + \frac{1}{x} = \cos\alpha$$

llavors, per a tot $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha.$$

16E6.–Demostreu que si al producte de quatre nombres naturals consecutius s'afegeix una unitat, el resultat és un quadrat perfecte.

16E7.–El punt M varia sobre el segment AB que mesura 2 m.

a) Trobeu l'equació i la representació gràfica del lloc geomètric dels punts del pla les coordenades dels quals, x, y, són, respectivament, les àrees dels quadrats de costats AM i BN.

b) Digueu quina classe de corba és. (Suggeriment: feu un gir d'eixos de 45°).

c) Trobeu l'àrea del recinte comprès entre la corba obtinguda i els eixos de coordenades.

16E8.–Determineu tots els triangles tals que les longituds dels tres costats i la seva àrea són quatre nombres naturals consecutius.

CURS 1980-81

Problemes de la XVII Olimpíada Matemàtica.
Primera fase (Catalunya), 1980-81

Primera sessió. 24 d'Abril de 1981.

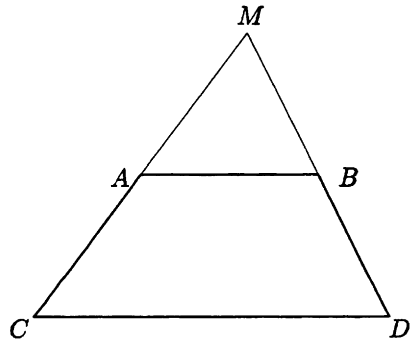
17C1.–Tres nombres diferents posats en un cert ordre estan en progressió artimètica, i posats en un altre ordre estan en progressió geomètrica. Busqueu la raó d'aquesta progressió geomètrica.

17C2.–Calculeu

$$\int_3^6 \left([x] + \sqrt{x-[x]}\right)\, dx,$$

on $[x]$ designa la part entera del nombre real x.

17C3.–Un trapezi té els dos vèrtexs C, D d'una base fixos. L'altra base AB és de longitud constant i la suma de les longituds dels costats CA i DB també és constant. Trobeu la figura que descriu el punt M intersecció de les rectes CA i DB.



Segona sessió. 25 d'Abril de 1981.

17C4.–Direm que un políedre és *regular* si totes les cares són polígons del mateix nombre k de costats i a cada vèrtex hi concorren el mateix nombre n d'arestes.

Utilitzant que el nombre de cares menys el d'arestes més el de vèrtexs d'un políedre és sempre 2, demostreu que els únics políedres regulars són el tetràedre, l'hexàedre, l'octàedre, el dodecàedre i l'icosàedre.

17C5.–Tres jugadors convenen que quan un perdi una partida donarà a cada un dels altres la quantitat de diners que en aquell moment tingui cada un. Després de jugar tres partides cada un d'ells en perd una i es retiren amb 40 duros cada un. Quants duros tenien en començar?

17C6.–Sigui A l'àrea d'un pentàgon regular i a l'àrea del pentàgon format per les diagonals del primer. Demostreu que

$$a = A\left(\frac{\sin 18^\circ}{1 - 2\sin^2 18^\circ}\right)^2 .$$

Problemes de la XVII Olimpíada Matemàtica. Segona fase (Espanya), 1980-81

Primera sessió. Juny de 1981.

17E1.–Calculeu la suma de n sumands

$$7+77+777+\cdots+7\ldots7.$$

17E2.–Un vas de vidre cilíndric té 8 cm d'altura i la seva vora 12 cm de circumferència. Al seu interior, a 3 cm de la vora, hi ha una diminuta gota de mel. En un punt de la superfície exterior, en el pla que passa per l'eix del cilindre i per la gota de mel, i situat a 1 cm de la base (fons) del vas, hi ha una mosca. Digueu quin és el camí més curt que ha de recórrer la mosca caminant per la superfície del vas, per tal d'arribar a la gota de mel. Trobeu també la longitud d'aquest camí.

17E3.–Donades les rectes que es creuen r i s, es consideren les rectes u i v tals que:

a) u és simètrica de r respecte de s,

b) v és simètrica de s respecte de r.

Determineu l'angle que han de formar les rectes donades per tal que u i v siguin coplanàries.

17E4.–Calculeu la integral

$$\int \frac{dx}{\sin(x-1)\sin(x-2)}.$$

Suggeriment: Canvi $\tan x = t$.

Segona sessió. Juny de 1981.

17E5.–Donat un nombre natural no nul n, sigui f_n la funció de l'interval tancat $[0,1]$ a $\mathbb{R}$ definida així:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{si } 0 \leq x < 1/n \\ 3/n, & \text{si } 1/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Es demana:

a) Representar gràficament la funció.

b) Calcular $A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

c) Trobar, si eisteix, $\lim_{n\to\infty} A_n$.

17E6.–Demostreu que la transformació producte de la simetria de centre $(0,0)$ per la simetria d'eix la recta d'equació $x = y+1$, pot expressar-se com a producte d'una simetria d'eix la recta e per una translació de vector $\vec{v}$, amb e paral·lela a $\vec{v}$. Determineu una recta e i un vector $\vec{v}$ que compleixin les condicions indicades. Són únics e i $\vec{v}$?

17E7.–En una fàbrica de pilotes de tennis hi ha 4 màquines m_1, m_2, m_3, m_4, que produeixen, respectivament, el 10%, 20%, 30% i 40% de les boles que surten de la fàbrica. La màquina m_1 introdueix defectes en un 1% de les boles que fabrica, la màquina m_2 en el 2% de les que produeix, la m_3 en el 4% i la m_4 en el 15%. De totes les pilotes fabricades en un dia, se'n tria una a l'atzar i resulta ser defectuosa. Digueu quina és la probabilitat que aquesta bola hagi estat elaborada per la màquina m_3.

17E8.–Si a és un nombre senar, demostreu que

$$a^4 + 4a^3 + 11a^2 + 6a + 2$$

és una suma de tres quadrats i que és divisible per 4.

CURS 1981-82

Problemes de la XVIII Olimpíada Matemàtica.
Primera fase (Catalunya), 1981-82

Primera sessió. 7 de Maig de 1982, tarda.

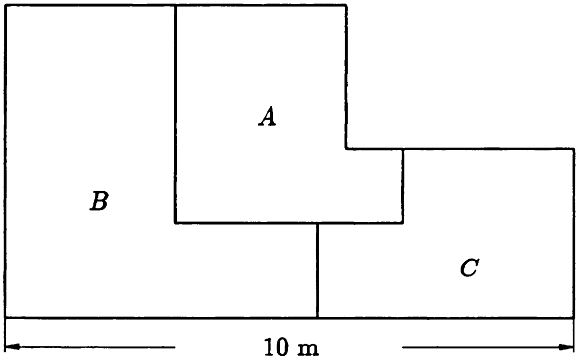
18C1.–Sabent que en un cert instant la busca petita d'un rellotge està entre les 10 i les 11, i la busca gran entre la 1 i les 2, i que al cap d'un cert temps les busques han intercanviat els seus llocs, calculeu el temps transcorregut entre aquests dos instants.

18C2.–Un cos sòlid té per base un cercle de radi r i tota secció ortogonal a un diàmetre fix és un triangle equilàter. Calculeu:

a) la naturalesa de la corba que determina el llom del sòlid;

b) el volum del cos.

18C3.–Sabent que les figures A, B, C del croquis són iguals, calculeu la seva àrea. (Tots els angles són rectes i els segment rectilinis.)



Segona sessió. 8 de Maig de 1982, matí.

18C4.–Un safareig té tres aixetes A, B i C. Si obrim A i B el safareig s'omple en dues hores, si obrim A i C s'omple en tres hores i si obrim B i C s'omple en sis hores. Quant tardaria a omplir-se el safareig si les obrim totes tres alhora?

18C5.–Quatre esferes descansen totes sobre un mateix pla. Cada esfera és tangent a les altres tres. Se sap que tres de les esferes tenen el mateix radi R. Es demana el radi r de la quarta esfera en funció de R.

18C6.–Tenim n boles i sabem que comptades de 8 en 8 en queden 7, comptades de 9 en 9 en queden 8 i comptades de 10 en 10 en queden 9. Podem saber quantes en queden comptades de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4, de 5 en 5, de 6 en 6 i de 7 en 7?

Problemes de la XVIII Olimpíada Matemàtica. Segona fase (Espanya), 1981-82

Primera sessió. Juny de 1982.

18E1.–A la pàgina de passatemps d'un diari es proposa el passatemps següent: "Dos nens, Antoni i Josep, tenen 160 tebeos. L'Antoni compta els seus de 7 en 7 i li'n sobren 4. En Josep compta els seus de 8 en 8 i també li'n sobren 4. Quants tebeos tenen cadascun?" Al següent número del diari es dóna la solució: "L'Antoni té 60 tebeos i en Josep en té 100." Analitza aquesta solució i indica què faria una matemàtic amb aquest problema.

18E2.–En compondre una simetria d'eix r amb un gir d'angle recte al voltant d'un punt P que no pertany a la recta, resulta un moviment M.

És M una simetria axial? Hi ha alguna recta invariant per M?

18E3.–Es llança un coet i arriba als 120 m d'altura; a la caiguda perd 60 m, a continuació recupera 40 m, torna a perdre'n 30, a guanyar-ne 24, a perdre'n 20, etc.

Si el procés segueix indefinidament, a quina altura tendeix a estabilitzar-se?

18E4.–Determineu un polinomi de coeficients reals no negatius que compleixi les dues condicions següents:

$$p(0) = 0, \qquad p(|z|) \leq x^4 + y^4,$$

essent $|z|$ el mòdul del nombre complex $z = x + iy$.

Segona sessió. Juny de 1982.

18E5.–Construïu un quadrat coneixent la suma de la diagonal i el costat.

18E6.–Demostreu que si u, v són nombres reals no negatius qualssevol, i a, b nombres reals positius tals que $a + b = 1$, aleshores

$$u^a v^b \leq au + bv.$$

18E7.–Sigui S el subconjunt de nombres racionals que es poden escriure en la forma a/b, on a és un enter qualsevol i b un enter senar. Digueu si la suma i el producte de dos elements de S també hi pertany. Digueu si a S hi ha elements tals que l'invers també hi pertany.

18E8.–Donat un conjunt C de punts del pla, s'anomena distància d'un punt P del pla al conjunt C a la més petita de les distàncies de P a cada un dels punts de C. Siguin els conjunts $C = \{A, B\}$, amb $A = (1,0)$ i $B = (2,0)$; i $C' = \{A', B'\}$ amb $A' = (0,1)$ i $B' = (0,7)$, en un sistema de referència ortonormal.

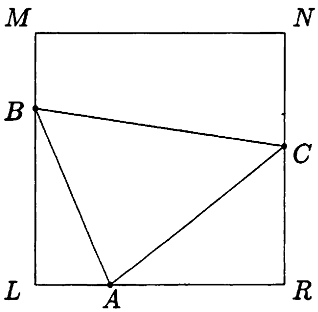
Trobeu i dibuixeu el conjunt M de punts del pla que equidisten de C i C'.

Estudieu si és derivable la funció que té per gràfic el conjunt M obtingut abans.

CURS 1982-83

Problemes de la XIX Olimpíada Matemàtica.
Primera fase (Catalunya), 1982-83

Primera sessió. 17 de Desembre de 1982, de 16 h a 20 h.



19C1.–Sobre un quadrat $LMNR$ de costat 1 tenim tres punts A, B, C tals que les figures ALB, ARC i $BMNC$ tenen la mateixa àrea. Calculeu l'àrea màxima i mínima del triangle ABC.

19C2.–Determineu els nombres naturals n que divideixen tots els nombres naturals les darreres xifres dels quals són exactament les xifres de n.

19C3.–Demostreu que si $0 < t < \pi$ aleshores $\sin(t/2) > t/\pi$.

19C4.–Es posa una rata en una caixa que té quatre sortides aparentment iguals. Una de les sortides es considera *bona* i les altres *dolentes*; si la rata tria una sortida dolenta, rep una decàrrega elèctrica que no la deixa sortir. Es demana quina és la probabilitat que la rata surti de la caixa en un màxim de tres intents, considerant:

a) que la rata no té memòria;

b) que la rata té memòria.

Segona sessió. 18 de Desembre de 1982, de 9 h a 13 h.

19C5.–Digueu en quants zeros acaba el nombre 1000!

19C6.–Digueu quina condició han de complir els nombres complexos α i β per tal que els punts α, β, $\alpha+\beta$ i $\alpha\beta$ siguin vèrtexs d'un paral·lelogram.

19C7.–Sigui O l'ortocentre d'un triangle (és a dir, el punt d'intersecció de les altures), i A i B els punts d'intersecció d'una altura amb el costat corresponent i amb la circumferència circumscrita al triangle, respectivament. Hi ha alguna relació entre els segments OA i OB?

19C8.–Determineu el volum mínim V_n d'una piràmide regular recta de n costats circumscrita a una esfera donada. Calculeu

$$\lim_{n\to\infty} V_n.$$

Problemes de la XIX Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya), 1982-83

Primera sessió. Febrer de 1983.

19E1.–Mentre Teofrast parlava amb Aristòtil sobre la classificació de les plantes, tenia un gos lligat a una columna cilíndrica de radi r perfectament llisa, amb una corda molt fina que envoltava la columna i amb un llaç de baga escorredora. El gos estava lligat a l'extrem lliure de la corda. En intentar arribar a Teofrast, el gos va tibar la corda i la trencà. Digueu quina era la distància de la columna al nus en el moment de trencar-se.

19E2.–Construïu un triangle coneixent un angle, la raó dels costats que el formen i el radi del cercle inscrit.

19E3.–Una semicircumferència de radi r es divideix en $n+1$ parts iguals i s'uneix un punt qualsevol k de la divisió amb els extrems de la semicircumferència, formant així un triangle A_k. Calculeu el límit, quan n tendeix a infinit, de la mitjana aritmètica de les àrees dels triangles.

19E4.–Determineu el nombre d'arrels reals de l'equació

$$16x^5 - 20x^3 + 5x + m = 0.$$

Segona sessió. Febrer de 1983.

19E5.–Trobeu les coordenades dels vèrtexs d'un quadrat $ABCD$, sabent que A és sobre la recta $y - 2x - 6 = 0$, C és sobre $x = 0$ i B és el punt $(a, 0)$, essent $a = \log_{2/3}(16/81)$.

19E6.–En una cafeteria, un vas de llimonada, tres entrepans i set ensaïmades han costat 1 xíling i 2 penics; i un vas de llimonada, quatre entrepans i i 10 ensaïmades valen 1 xíling i 5 penics. Trobeu el preu de:

a) un vas de llimonada, un entrepà i una ensaïmada;

b) dos vasos de llimonada, tres entrepans i cinc ensaïmades.

(1 xíling = 12 penics).

19E7.–Un tetràedre regular d'aresta 30 cm descansa sobre una de les seves cares i és buit per dintre. Es posa a l'interior 2 l d'aigua. Es demana l'altura a la qual arriba l'aigua i l'àrea de la superfície lliure del líquid.

19E8.–L'any 1960, el més gran de tres germans té una edat que és la suma de les dels dos germans més petits. Uns anys després, la suma de les edats de dos dels germans és doble que l'edat de l'altre. Han passat ara un nombre d'anys des de 1960, que és igual a dues terceres parts de la suma de les edats que els tres germans tenien el 1960, i un d'ells té 21 anys. Quina edat tenen els altres dos?

CURS 1983-84

Problemes de la XX Olimpíada Matemàtica.
Primera fase (Catalunya), 1983-84

Primera sessió. 16 de Desembre de 1983, de 16 h a 20 h.

20C1.–Trobeu totes les funcions f, definides en el conjunt dels nombres reals estrictament positius, que prenen valors reals estrictament positius, i que compleixen

1) $f(xf(y)) = yf(x)$ per a tot x, y positius.

2) $f(x) \to 0$ si $x \to \infty$.

20C2.–Determineu els triangles tals que l'altura i la mitjana concurrents en un vèrtex divideixen l'angle en tres parts iguals.

20C3.–Demostreu que si la funció $f(x)$ és contínua, positiva i decreixent per a $x \geq 0$, i compleix

$$\lim_{x \to \infty} \int_0^x f(t)\, dt = S,$$

aleshores

$$\lim_{x \to \infty} x f(x) = 0.$$

Segona sessió. 17 de Desembre de 1983, de 9 h a 13 h.

20C4.–Donat un triangle ABC, considerem el triangle $A_1B_1C_1$ que té els vèrtexs sobre els costats oposats a A, B i C, respectivament, i els seus costats són perpendiculars als costats del primer triangle. Calculeu la raó de les àrees dels dos triangles en funció dels angles del triangle ABC.

20C5.–Trobeu el mínim nombre natural m tal que $m!$ és divisible per 7^{1983}.

20C6.–Donat un triangle equilàter, considerem les rectes que passen pel punt mitjà d'un costat. Estudieu la variació de la longitud dels segments d'aquestes rectes interceptats pel triangle.

Problemes de la XX Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya), 1983-84

Primera sessió. Febrer de 1984.

20E1.–En una posició O d'un aeroport de campanya hi ha un canó que pot girar $360°$. Dos tancs ataquen aquest lloc seguint trajectòries rectes AB i CD donades. Trobeu gràficament l'abast del canó sabent que la suma de les longituds dels segments de trajectòria dels tancs en els quals aquests estan sota el foc del canó, és una longitud donada ℓ.

20E2.–Determineu un nombre de cinc xifres tal que el seu quadrat acabi en les mateixes cinc xifres col·locades en el mateix ordre.

20E3.–Donats dos nombres reals posiitius p, q tals que $p+q=1$, i sabent que tot parell de nombres reals x, y compleix $(x-y)^2 \geq 0$, es demana que demostreu

a) $$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy},$$

b) $$\frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2,$$

c) $$\left(p+\frac{1}{p}\right)^2 + \left(q+\frac{1}{q}\right)^2 \geq \frac{25}{2},$$

20E4.–Calculeu

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}.$$

Segona sessió. Febrer de 1984.

20E5.–Portem arcs iguals $AB = A'B' = x$ sobre dues circumferències iguals a partir de dos punts fixos A, A' sobre cada una d'elles. Trobeu el lloc geomètric dels punts mitjans del segment BB' en variar x:

a) si posem els arcs en el mateix sentit,

b) si posem els arcs en sentits oposats.

20E6.–Es considera una circumferència γ de centre $(3,0)$ i radi 3, i la recta r paral·lela a l'eix Ox que dista 3 de l'origen. Es traça una recta variable per l'origen que talla γ en el punt M i la recta r en P. Determineu el lloc geomètric dels punts d'intersecció de les paral·leles a Ox i Oy traçades per M i P respectivament.

20E7.–Es consideren nombres naturals escrits en el sistema de base 10.

a) Trobeu el menor nombre que en suprimir-li la primera xifra quedi reduït a la cinquena part. Digueu com són els nombres que tenen aquesta propietat.

b) Demostreu que no existeix cap nombre tal que en suprimir-li la primera xifra quedi dividit per 12.

c) Formuleu un criteri general que ens permeti saber si un nombre pot quedar dividit per k en suprimir-li la primera xifra.

20E8.–Trobeu el residu de la divisió per $x^2 - 1$ del determinant

$$\begin{vmatrix} x^3+3x & 2 & 1 & 0 \\ x^2+5x & 3 & 0 & 2 \\ x^4+x^2+1 & 2 & 1 & 3 \\ x^5+1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

CURS 1984-85

Problemes de la XXI Olimpíada Matemàtica. Primera fase (Catalunya), 1984-85

Primera sessió. 18 de Gener de 1985, de 16 h a 20 h.

21C1.–Digueu quins són els triangles que poden ser dividits per una recta en dos triangles semblants.

21C2.–La suma de dos nombres reals és igual a la suma dels seus quadrats. Digueu:

a) El valor que pot tenir aquesta suma.

b) Els valors que poden tenir cada un dels nombres.

c) Si els dos nombres poden ser iguals.

d) El màxim de la diferència d'aquests dos nombres.

21C3.–Resoleu l'equació

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$$

Segona sessió. 19 de Gener de 1985, de 9 h a 13 h.

21C4.–Demostreu que tot triangle pot subdividir-se en triangles acutangles.

21C5.–Tres nombres diferents estan en progressió aritmètica i els seus quadrats estan en progressió geomètrica. Calculeu la raó de la progressió geomètrica.

21C6.–Un hostal té infinites portes numerades amb els números 1, 2, 3, ... , i estan totes tancades. En aquest hostal hi ha infinits hostes que estan numerats també 1, 2, 3, ... , i tots són a passejar. Quan l'hoste número n torna a l'hostal obre totes les portes múltiples de n que troba tancades i tanca totes les portes múltiples de n que troba obertes. Digueu com estaran les portes quan hagin arribat tots els hostes.

Problemes de la XXI Olimpíada Matemàtica. Segona fase (Espanya), 1984-85

Primera sessió. Febrer de 1985.

21E1.–Sigui $\mathcal{P}$ el conjunt dels punts del pla i $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ una aplicació que compleix les tres condicions següents:

a) f és bijectiva.

b) Per cada recta r del pla, $f(r)$ és una recta.

c) Per cada recta r, la recta $f(r)$ és paral·lela o coincident amb r.

Digueu quines possibles transformacions poden ser f.

21E2.–Sigui $\mathbb{Z}$ el conjunt dels enters i $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ el conjunt de parells ordenats d'enters. La suma d'aquests parells es defineix

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b'),$$

essent $(-a, -b)$ l'oposat de (a, b).

Estudieu si existeix un subconjunt E de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que compleixi les condicions següents:

a) La suma de dos parells de E també és a E.

b) El parell $(0, 0)$ pertany a E.

c) Si (a, b) no és $(0, 0)$, llavors o bé (a, b) pertany a E, o bé $(-a, -b)$ pertany a E, però no tots dos.

21E3.–Resoleu l'equació

$$\tan^2 2x + 2 \tan 2x \, \tan 3x - 1 = 0.$$

21E4.–Considerem tres nombres naturals a, b, c tals que la raó

$$\frac{a + b + c}{abc}$$

sigui l'invers d'un nombre k enter positiu. Es demana que demostreu:

a) $a^3 + b^3 + c^3$ no és primer.

b) Per a cada $k \in \mathbb{N}$ existeixen ternes de naturals a, b, c que compleixen les condicions.

Segona sessió. Febrer de 1985.

21E5.–Trobeu l'equació de la circumferència que passa pels afixos de les solucions de l'equació

$$z^3 + (-1+i)z^2 + (1-i)z + i = 0.$$

21E6.–Es consideren les semirectes no alineades Ox, Oy. Pel punt $A \in Ox$ es tracen parells de rectes r_1, r_2, antiparal·leles respecte a l'angle xOy; siguin M, N les interseccions de r_1 amb Oy i de r_2 amb Ox, respectivament. Sigui P el punt d'intersecció de les bisectrius dels angles AMy, ANy. Trobeu el lloc geomètric de P en variar A.

21E7.–Donada l'equació $x^5 - px - 1 = 0$, estudieu el valor de p que fa possible que existeixin dues solucions de l'equació, x_1, x_2, que a la vegada siguin solucions de $x^2 - ax + b = 0$, amb a, b enters.

21E8.–Direm que una matriu quadrada és de *suma constant* si la suma dels elements de cada fila, de cada columna, i de cada diagonal, són valors iguals. Anàlogament, una matriu quadrada és de *producte constant* si són iguals els productes dels elements de cada fila, de cada columna i de cada diagonal. Determineu les matrius quadrades d'ordre 3 sobre $\mathbb{R}$ que són, a la vegada, de suma i producte constants.

CURS 1985-86

Problemes de la XXII Olimpíada Matemàtica.
Primera fase (Catalunya), 1985-86

Primera sessió. 29 de Novembre de 1985, de 16 h a 20 h.

22C1.–Siguin A i B dos subconjunts del conjunt dels nombres naturals $\mathbb{N}$ que siguin una partició, és a dir, tals que $A \cap B = \emptyset$ i $A \cup B = \mathbb{N}$.

a) Demostreu que existeix un nombre natural m tal que $m+5$ o $m+6$ pertany al mateix subconjunt que m.

b) Demostreu que existeixen infinits nombres que compleixen la propietat anterior.

22C2.–Tres punts A, B, C s'uneixen per segments. Sobre la meitat del segment AB es construeix un quadrat, sobre el segment BC un altre quadrat, i sobre el segment CA un rectangle de base CA i altura 4 cm. L'àrea del rectangle supera en 20 cm^2 la suma de les àrees dels dos quadrats. Calculeu l'àrea del rectangle.

22C3.–Calculeu la suma dels quadrats de les distàncies entre els afixos dels nombres complexos que són solucions de l'equació

$$z^{1985} - 1 = 0.$$

22C4.–Trobeu el polinomi $p(x)$ de grau mínim tal que $p(x)+1$ sigui divisible per $(x-1)^4$ i $p(x)-1$ sigui divisible per $(x+1)^4$.

Segona sessió. 30 de Novembre de 1985, de 9 h a 13 h.

22C5.–Ordeneu de més gran a més petit els nombres

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \dots , \sqrt[n]{n}, \dots$$

22C6.–A un ball hi ha vuit nois i vuit noies que estan asseguts alternativament en fila. De quantes maneres es poden formar cinc parelles de ball si cada parella ha d'estar formada per un noi i una noia asseguts un al costat de l'altre.

22C7.–Donats dos nombres naturals p i q primers entre ells, calculeu les sumes

$$\sum_{k=1}^{q-1} D\left(\frac{kp}{q}\right) \quad \text{i} \quad \sum_{h=1}^{p-1} D\left(\frac{hq}{p}\right),$$

on $D(a)$ indica la part decimal del nombre a.

22C8.–Calculeu els nombre naturals p i q més petits tals que $1/p$ i $1/q$ siguin dos decimals periòdics purs de períodes A i B, sabent que aquests períodes tenen el mateix nombre de xifres i el seu màxim comú divisor és 10989.

Problemes de la XXII Olimpíada Matemàtica. Segona fase (Espanya), 1985-86

Primera sessió. Febrer de 1986.

22E1.–Indicarem per $[x], \{x\}$ les parts entera i decimal del nombre real x. Definim una *distància* entre els nombres reals x i y

$$d(x,y) = \sqrt{([x]-[y])^2 + (\{x\}-\{y\})^2}.$$

Determineu (com a unió d'intervals) el conjunt dels nombres reals que *disten* del nombre $3/2$ menys que $202/100$.

22E2.–Un segment d divideix el segment s si existeix un natural n tal que

$$nd = d + d + \overset{n}{\smile}\!\cdots + d = s.$$

a) Demostreu que si el segment d divideix els segments s i s' amb $s < s'$, llavors divideix el segment diferència $s' - s$.

b) Demostreu que cap segment divideix el costat s i la diagonal s' d'un pentàgon regular (raoneu sobre el pentàgon regular format per les diagonals del pentàgon donat, i no feu càlculs numèrics).

22E3.–Trobeu els valors de $n \in \mathbb{N}$ tals que $5^n + 3$ és una potència de 2 d'exponent natural.

Segona sessió. Febrer de 1986.

22E4.–Indiquem per $m(a,b)$ la mitjana aritmètica dels nombres reals positius a i b. Donada una funció real positiva g que té la primera i la segona derivada positives, definim la *mitjana* $\mu(a,b)$ relativa a la funció g mitjançant

$$2\,g\big(\mu(a,b)\big) = g(a) + g(b).$$

Digueu raonadament quina de les dues mitjanes m i μ és més gran.

22E5.–Considerem la corba Γ definida per l'equació $y^2 = x^3 + bx + b^2$, on la constant b és un nombre racional no nul. Inscriviu a la corba Γ un triangle tal que les coordenades dels vèrtexs siguin racionals.

22E6.–Calculeu

$$\prod_{k=1}^{14} \cos\left(\frac{k\pi}{15}\right).$$

CURS 1986-87

Problemes de la XXIII Olimpíada Matemàtica. Primera fase (Catalunya), 1986-87

Primera sessió. 22 de Novembre de 1986.

23C1.–Elevant $3+\sqrt{5}$ a la n-èsima potència s'obté un nombre de la forma $a+b\sqrt{5}$ amb a i b enters. Demostreu que

$$0 < a - b\sqrt{5} < 1.$$

23C2.–Determineu els valors de a que fan que la successió $a_1 = a$, $a_2 = a + a_1^2$, $a_3 = a + a_2^2$, ... , $a_n = a + a_{n-1}^2$, sigui creixent.

23C3.–En un triangle ABC de costats a, b, c, siguin m_a, m_b, m_c les mitjanes que passen, respectivament, pels vèrtexs A, B, C. Se sap que $b/a = \sqrt{17/5}$ i que $m_c = 2m_b$. Calculeu l'angle que formen aquestes dues mitjanes i les relacions c/a i c/b.

23C4.–Els canvis de rasant de les autopistes es fan segons un perfil parabòlic $y = -ax^2$, amb $a > 0$.

a) Determineu el màxim valor de a per tal que un observador de 1 m d'alçada amb visual tangent al punt més alt vegi un objecte de 0.1 m d'altura situat a 100 m de distància (Fig. 1).

b) Determineu el màxim valor de a per tal que un observador de 1 m d'alçada situat a qualsevol lloc vegi un objecte de 0.1 m d'altura situat a 100 m de distància (Fig. 2).

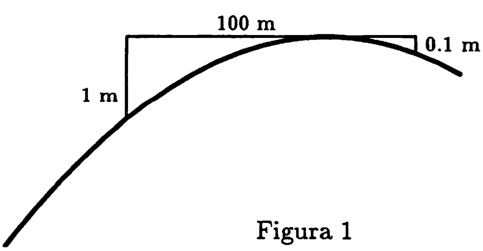


Figura 1

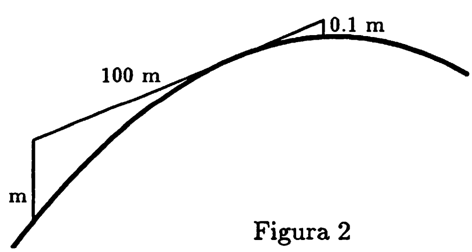


Figura 2

Segona sessió. 23 de Novembre de 1986.

23C5.–Estudieu la continuïtat de la funció $f(x) = x[1/x]$ i representeu gràficament la seva restricció al conjunt $(-\infty, -1/4] \cup [1/4, \infty]$, si $[x]$ indica la funció *part entera* de x.

23C6.–Digueu si es pot saber la data de naixement d'una persona sabent que ha nascut al segle XX, que la diferència entre l'any de naixement i 1900, més 100 vegades la suma del número del mes multiplicada per 40 i el número del dia és 13442.

23C7.–Un tren té 88 m de longitud i un altre 92 m. Quan circulen en direccions oposades tarden 7.5 s a creuar-se, i quan circulen en la mateixa direcció en tarden 45. Trobeu la velocitat dels dos trens.

23C8.–Trobeu dos nombre complexos α i β tals que els afixos dels nombres α, β, α/β i β/α siguin els vèrtexs d'un quadrat de diagonals α, β/α i β, α/β.

Problemes de la XXIII Olimpíada Matemàtica. Segona fase (Espanya), 1986-87

Primera sessió. Febrer de 1987.

23E1.–Siguin a, b, c les longituds dels costats d'un triangle no isòsceles. Es donen tres cercles concèntrics de radis a, b i c.

a) Digueu quin és el nombre de triangles equilàters d'àrees diferents que es poden construir, de manera que les rectes que contenen els costats siguin cada una tangent a un dels cercles.

b) Trobeu les superfícies d'aquests triangles.

23E2.–Demostreu que per tot nombre natural $n > 1$ es compleix

$$1 \cdot \sqrt{\binom{n}{1}} + 2 \cdot \sqrt{\binom{n}{2}} + \cdots + n \cdot \sqrt{\binom{n}{n}} < \sqrt{2^{n-1}n^3}.$$

23E3.–Un triangle donat T es descompon en triangles T_1, T_2, ..., T_n de manera que:

a) Cap parell de triangles T_i té punts interiors en comú.

b) La unió dels triangles T_i és T.

c) Tot segment que és costat d'algun triangle T_i, o bé és costat d'un altre triangle T_j, o bé es costat del triangle T.

Siguin s el nombre total de costats (cada un comptat una sola vegada, encara que sigui comú a dos triangles), i v el nombre total de vèrtexs (cada un comptat una sola vegada, encara que sigui comú a diversos triangles).

Demostreu que si n és senar, existeixen diverses descomposicions d'aquesta mena, i totes tenen el mateix nombre v de vèrtexs i el mateix nombre s de costats. Expresseu v i s en funció de n. Demostreu també que si n és parell no existeix cap descomposició.

Segona sessió. Febrer de 1987.

23E4.–Si a i b són dos nombres reals diferents, resoleu el sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ (ax + by)^2 &\leq a^2 x + b^2 y. \end{aligned}$$

Resoleu també el sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ (ax + by)^4 &\leq a^4 x + b^4 y. \end{aligned}$$

23E5.–En un triangle isòsceles ABC tenim punts D i E respectivament sobre AB i AC. Coneixem la mesura dels angles indicats a continuació: $ABE = 20°$, $ECD = 50°$, $ACD = 30°$ i $DCB = 60°$. Trobeu el valor de l'angle EDC.

23E6.–Per cada nombre natural n considerem el polinomi

$$P_n(x) = x^{n+2} - 2x + 1.$$

a) Demostreu que l'equació $P_n(x) = 0$ té una arrel c_n i només una a l'interval $(0, 1)$.

b) Calculeu $\lim_{n\to\infty} c_n$.

CURS 1987-88

Problemes de la XXIV Olimpíada Matemàtica.
Primera fase (Catalunya), 1987-88

Primera sessió. 11 de Desembre de 1987, de 16 h a 20 h.

24C1.–Determineu les potències de $(1+i)$ que són interiors a la corona circular determinada per les circumferències de centre $O=(0,0)$ i radis respectius 1000 i 10000.

24C2.–Busqueu els nombres primers de la forma n^4+4, on n és un nombre enter positiu.

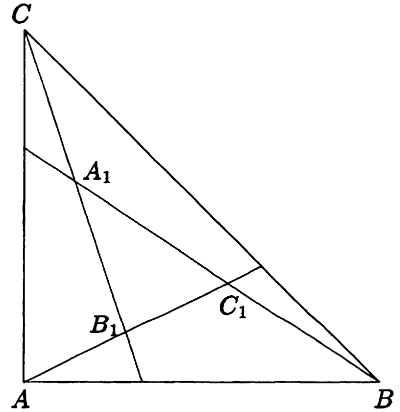
24C3.–Demostreu que per a qualsevol polinomi $p(x)$ existeix un nombre real k tal que un dels dos polinomis $p(x)+k$ i $x\,p(x)+k$ no té cap arrel real i l'altre una de sola.

24C4.–Donat un triangle rectangle isòsceles ABC, dividim cada un dels seus costats en tres parts iguals i tracem les rectes de la figura, que determinen un triangle $A_1B_1C_1$.

Determineu l'àrea del triangle $A_1B_1C_1$ en funció de l'àrea del triangle ABC.

Què passa si el triangle rectangle ABC no és isòsceles?

Què passa si el triangle ABC és un triangle qualsevol?



Segona sessió. 12 de Desembre de 1987, de 9 h a 13 h.

24C5.–Demostreu que si dos nombre enters són de la mateixa paritat (tots dos parells o tots dos senars), la meitat de la suma dels seus quadrats és una suma de dos quadrats.

24C6.–Demostreu que l'equació

$$3^a + 1 = 5^b + 7^c$$

només admet les solucions enteres $a = 0,\ b = 0,\ c = 0$.

24C7.–Per un punt de la vora d'un quadrat es tracen dues rectes que divideixen el quadrat en tres trossos de la mateixa àrea. Calculeu l'angle d'aquestes rectes en funció dels punts de la vora.

24C8.–(a) Estudieu els intervals de creixement i decreixement de la funció

$$F(t) = \frac{\ln t}{t}.$$

(b) Comproveu que si $k \geq 3$ és enter, l'equació

$$(\ln x)^k = x$$

té exactament dues solucions més grans que e, diguem r_k i s_k, $r_k < s_k$, i que

$$\lim_{k \to \infty} r_k = e \qquad \text{i} \qquad \lim_{k \to \infty} s_k = +\infty.$$

Indicació: En la resolució de l'apartat (b) tingueu en compte l'apartat (a).

Problemes de la XXIV Olimpíada Matemàtica. Segona fase (Espanya), 1987-88

Primera sessió. Febrer de 1988.

24E1.–Sigui (x_n), $n \in \mathbb{N}$, una successió de nombres enters tal que

$$x_1 = 1,$$
$$x_{n+1} > x_n, \text{ per } n \geq 1,$$
$$x_{n+1} \leq 2n, \text{ per } n \geq 1.$$

Demostreu que per tot enter natural k existeixen dos termes de la successió x_r i x_s tals que $x_r - x_s = k$.

24E2.–Sobre una circumferència s'eligeixen $n > 3$ punts i es numeren de 1 a n en qualsevol ordre. Direm que dos punts no consecutius a i b estan relacionats si en un dels dos arcs d'extrems a i b, tots els punts estan marcats amb números de valor menor que els de a i b.

Demostreu que el nombre de parells de punts relacionats és exactament $n-3$.

24E3.–Demostreu que els binomis $25x+31y$ i $3x+7y$ són múltiples de 41 pels mateixos valors de x i y.

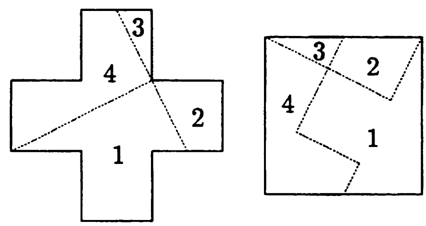
Segona sessió. Febrer de 1988.

24E4.–S'atribueix al matemàtic renaixentista Leonardo da Pisa (més conegut com Fibonacci) la successió definida de la manera següent

$$a_1 = 1,$$
$$a_2 = 1,$$
$$a_i = a_{i-1} + a_{i-2} \quad \text{per} \quad i > 2.$$

Expresseu a_{2n} en funció només dels tres termes a_{n-1}, a_n, a_{n+1}.

24E5.–És molt conegut el *puzzle* consistent a descompondre la creu grega de l'esquerra de la figura en quatre parts amb les quals compondre un quadrat. Una solució habitual és la de la figura de la dreta. Demostreu que hi ha una infinitat de solucions diferents.



Hi ha alguna solució que doni lloc a quatre parts iguals?

24E6.–Calculeu, per qualsevol valor del paràmetre enter t, solucions enteres x, y de l'equació

$$y^2 = x^4 - 22x^3 + 43x^2 + 858x + t^2 + 10452(t + 39).$$

CURS 1988-89

Problemes de la XXV Olimpíada Matemàtica.
Primera fase (Catalunya), 1988-89

Primera sessió. 16 de Desembre de 1988, de 16 h a 20 h.

25C1.–Demostreu que si n és un enter positiu i p és primer, aleshores $n^p - n$ és múltiple de p.

25C2.–Dos mòbils es desplacen amb velocitat constant al llarg d'un circuit tancat. Si surten simultàniament d'un mateix punt en el mateix sentit, tornen a coincidir al cap de 100 s i el més ràpid ha de menester 10 s menys que l'altre per a fer una volta completa.

Quant de temps tardaran a creuar-se si surten simultàniament del mateix punt en sentits oposats?

25C3.–Els extrems A i B d'un segment es mouen respectivament sobre dues rectes r i s que són perpendiculars. Descriviu la corba que recorre el punt M del segment tal que MA és la meitat de MB.

25C4.–La societat *Peces de Ferro S.A.* té nou accionistes que han de triar en Joan o en Pere com a President. És sabut que sis d'ells votaran en Joan i els altres tres en Pere, i que en el moment d'emetre el vot, cada un ho farà públicament en veu alta.

Determineu la probabilitat que en Joan vagi sempre per davant en les votacions.

Segona sessió. 17 de Desembre de 1988, de 9 h a 13 h.

25C5.–Considerem un conjunt $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ d'un nombre finit n de nombres reals estrictament positius. Demostreu que per a tot $n \geq 2$ es compleix

$$\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2 x_3} + \frac{x_2^2}{x_2^2 + x_3 x_4} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2 + x_n x_1} + \frac{x_n^2}{x_n^2 + x_1 x_2} \leq n - 1.$$

25C6.–Si α, β, γ són tres nombres complexos tals que els seus afixos determinen un triangle equilàter, demostreu que es compleix la igualtat

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha.$$

25C7.–Demostreu, per cada enter positiu n, les desigualtats

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}.$$

Si $[x]$ representa la part entera del nombre x, determineu el valor de

$$\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10^6}}\right].$$

25C8.–Descriviu totes les successions (a_n) de nombres reals tals que

$$|a_n - a_m| \leq e^{-(n+m)}.$$

Problemes de la XXV Olimpíada Matemàtica. Segona fase (Espanya), 1988-89

Primera sessió. Febrer de 1989.

25E1.–El programa d'una assignatura consta de n preguntes; l'examen consisteix en la resposta d'una pregunta triada a l'atzar. Un alumne només se sap una pregunta, però pot repetir l'examen n vegades. Expresseu, en funció de n, la probabilitat p_n que l'alumne aprovi l'examen. Digueu si p_n és creixent o decreixent quan n augmenta. Calculeu

$$\lim_{n\to\infty} p_n.$$

Calculeu la fita inferior màxima de les probabilitats p_n.

25E2.–Els punt A', B', C' dels costats BC, CA, AB d'un triangle ABC compleixen

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = k.$$

Les rectes AA', BB', CC' formen un triangle $A_1B_1C_1$. Donats k i l'àrea S del triangle ABC, calculeu l'àrea del triangle $A_1B_1C_1$.

25E3.–Demostreu que

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} < \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 99}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 100} < \frac{1}{10}.$$

Segona sessió. Febrer de 1989.

25E4.–Demostreu que el nombre 1989 i totes les seves potències enteres 1989^n es poden escriure com a suma de dos quadrats de nombres enters positius, i com a mínim de dues formes diferents.

25E5.–Sigui $\mathcal{D}$ el conjunt dels nombres complexos que es poden escriure de la forma $a+b\sqrt{-13}$, amb a, b enters. El nombre $14 = 14+0\sqrt{-13}$ es pot escriure com a producte de dos elements de $\mathcal{D}$: $14 = 2\cdot 7$. Expresseu 14 com a producte de dos elements de $\mathcal{D}$ de totes les maneres possibles.

25E6.–Demostreu que donats *set* nombres reals qualssevol, se'n poden triar dos, diguem a i b, de manera que

$$\sqrt{3}\,|a-b| < |1+ab|.$$

Doneu un exemple de *sis* nombres reals que no compleixein aquesta propietat.

CURS 1989-90

Problemes de la XXVI Olimpíada Matemàtica.
Primera fase (Catalunya), 1989-90

Primera sessió. 16 de Febrer de 1990, de 16 h a 20 h.

26C1.–Siguin A, B, C els vèrtexs d'un triangle i H l'ortocentre. Demostreu la igualtat

$$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA}.$$

26C2.–Demostreu que si les longitud a, b, c dels costats d'un triangle compleixen $a < b < c$, aleshores l'angle C oposat al costat c compleix $\cos C < 1/2$.

26C3.–Sigui $A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$.

a) Demostreu que per a tot nombre natural n, el nombre $A_{n+3} - A_n$ és divisible per 7.

b) Calculeu el residu de dividir A_{1990} per 7.

26C4.–Donada la corba

$$y = x + \frac{1}{2x^2},$$

a) Calculeu l'àrea $S(t)$ limitada per la corba, la seva asímptota inclinada i les rectes $x = 1$ i $x = t$ $(t > 1)$.

b) Calculeu

$$\lim_{t \to \infty} S(t).$$

Segona sessió. 17 de Febrer de 1990, de 9 h a 13 h.

26C5.–Resoleu a l'interval $[0,2\pi]$ la inequació

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x > 0.$$

26C6.–Un triangle rectangle T_1 té els costats en progressió geomètrica i un altre triangle rectangle T_2 els té en progressió aritmètica. Un costat del triangle T_1 és igual a un costat del triangle T_2. Calculeu el valor màxim i el valor mínim de

$$\frac{\text{àrea } T_1}{\text{àrea } T_2}.$$

26C7.–Determineu els nombres complexos z tals que els afixos dels nombres

$$z^{1989},\ z^{1990},\ z^{1991}$$

siguin els vèrtexs d'un triangle rectangle isòsceles amb l'angle recte en el punt z^{1990}.

26C8.–Esbrineu si és possible tenir un pla P, una esfera E i un tetràedre regular T tals que els plans paral·lels a P o bé no tallin ni a l'esfera E ni al tetràedre T, o bé els tallin en figures de la mateixa àrea.

Estudieu la mateixa qüestió si el tetràedre no és regular.

Problemes de la XXVI Olimpíada Matemàtica. Segona fase (Espanya), 1989-90

Primera sessió. 16 de Març de 1990.

26E1.–Siguin x i y dos nombres reals positius. Proveu que l'expressió

$$A = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy}$$

es pot escriure en la forma

$$B = \sqrt{x} + \sqrt{y + xy + 2y\sqrt{x}}$$

i compareu els nombres

$$L = \sqrt{3} + \sqrt{10 + 2\sqrt{3}} \quad \text{i} \quad M = \sqrt{5 + \sqrt{22}} + \sqrt{8 - \sqrt{22} + 2\sqrt{15 - 3\sqrt{22}}}.$$

26E2.–Cada punt d'un pla està pintat d'un color elegit entre tres de diferents. Es pregunta si existeixen necessàriament dos punts d'aquest pla que distin 1 cm i que estiguin pintats del mateix color.

26E3.–S'anomena part entera d'un nombre real a (i s'escriu $[a]$), el nombre enter més gran que sigui menor o igual que a. Si n és un nombre natural, demostreu que la part entera de $(4 + \sqrt{11})^n$ és un nombre senar.

Segona sessió. 17 de Març de 1990.

26E4.–Demostreu que la suma

$$\sqrt[3]{\frac{a+1}{2}+\frac{a+3}{6}\sqrt{\frac{4a+3}{3}}}+\sqrt[3]{\frac{a+1}{2}-\frac{a+3}{6}\sqrt{\frac{4a+3}{3}}}$$

és independent del valor de a, per tot valor real $a \geq -3/4$, i trobeu-ne el valor.

26E5.–Tres punts A', B', C' estan situats, respectivament, sobre els costats BC, CA i AB d'un triangle donat ABC d'àrea S, de manera que

$$\frac{AC'}{AB}=\frac{BA'}{BC}=\frac{CB'}{CA}=p,$$

essent p un paràmetre variable, $0 < p < 1$. Determineu

1) L'àrea del triangle $A'B'C'$ en funció de p.

2) El valor de p que fa mínima l'àrea anterior.

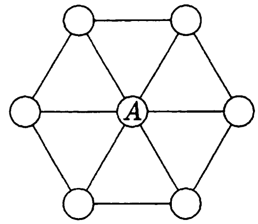
3) El lloc geomètric dels punts P d'intersecció de les paral·leles traçades per A' i C', repectivament als costats AB i AC, quan p varia de 0 a 1.

26E6.–Es consideren n punts del pla de forma que no hi hagi dues parelles equidistants. Per cada punt es traça el segment que l'uneix al més proper. Demostreu que cap punt està unit a més de cinc punts.

CURS 1994-95

Problemes de la XXVII Olimpíada Matemàtica. Primera fase (Catalunya), 1990-91

Primera sessió. 14 de Desembre de 1990, de 16 h a 20 h.



27C1.–La figura adjunta representa un entramat de camins per on pot moure's una tortuga, la qual, a cada cruïlla, escull a l'atzar un qualsevol dels camins que pot seguir. Si deixem la tortuga lliure en el punt A, calculeu la probabilitat que torni a passar pel punt A en menys de n moviments.

27C2.–Determineu quina condició han de complir les xifres de les desenes de dos nombres acabats en 6, per tal que el seu producte acabi en 36.

27C3.–Siguin r i R dos rectangles d'àrea unitat, tals que el perímetre de R és doble del perímetre de r. Siguin d i D les longituds de les diagonals de r i R.

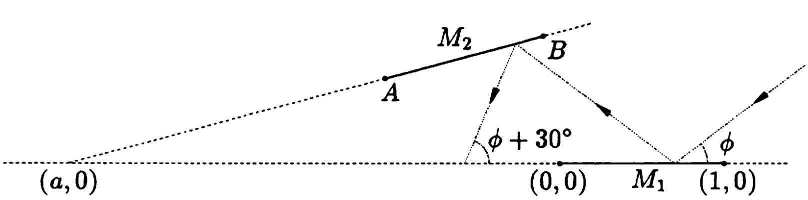
a) Demostreu que $2 < D/d \leq \sqrt{7}$.

b) Si $D = d\sqrt{5}$, determineu les longituds dels costats dels dos rectangles.

27C4.–Prenem un sistema rectangular de coordenades al pla. Tenim un mirall M_1 unidimensional posat cara amunt sobre el segment d'extrems $(0,0)$ i $(1,0)$. Sobre la recta que passa per $(a,0)$ amb $a<0$ i que té pendent $m>0$ posem un mirall M_2 d'extrems A i B mirant cap avall. Determineu a, m i els punts A i B per tal que es compleixi:

a) Tot raig que arriba a M_1 amb un angle ϕ respecte de la direcció de les x positives, $30° \leq \phi \leq 45°$, és reflectit cap a M_2, es reflecteix a M_2 i no torna a trobar M_1. L'angle entre la direcció de les x positives i el raig que arriba de M_2 és $\phi + 30°$.

b) La longitud de M_2 és mínima respecte a tots els possibles miralls que compleixen la condició anterior.



Segona sessió. 15 de Desembre de 1990, de 9 h a 13 h.

27C5.–Trobeu els nombres de quatre xifres que són iguals al quadrat de la suma del nombre format per les dues primers xifres i el format per les dues darreres xifres.

27C6.–Considereu un triangle equilàter inscrit en una circumferència de radi 1. Li apliquem una rotació d'angle ϕ de centre el centre de la circumferència. Calculeu l'àrea comuna als dos triangles i el valor de l'angle ϕ que fa que l'àrea comuna sigui mínima.

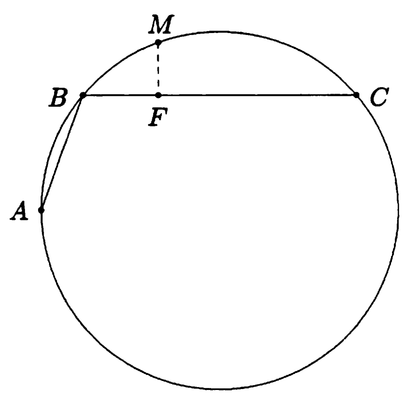
27C7.–Demostreu que tot nombre de la forma $2/n$, amb n senar, es pot posar com a suma de dues fraccions unitàries (és a dir, de fraccions de numerador 1.)

Deduïu-ne que tota fracció m/n, amb n senar, admet una descomposició en suma de fraccions unitàries diferents. Comproveu també que si m/n admet una descomposió en suma de r fraccions unitàries diferents, n'admet una altra en suma de s fraccions unitàries, per tot $s > r$.

27C8.–Siguin AB i BC dues cordes d'un cercle ($AB < BC$) i sigui M el punt mitjà de l'arc ABC. Sigui F el peu de la perpendicular des de M a la corda BC.

a) Proveu que F és el punt mitjà de la *corda trencada*, és a dir, $AB + BF = FC$.

b) Useu el punt anterior per veure que $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.



Problemes de la XXVII Olimpíada Matemàtica. Segona fase (Espanya), 1990-91

Primera sessió. 15 de febrer de 1991.

27E1.–Al pla, on s'ha pres un sistema de referència ortonormal, es consideren tots els punts (m, n) tals que les seves coordenades són nombres enters. Suposem que s'hagin traçat tots els segments que uneixen parells qualssevol d'aquests punts i que tenen longitud entera. Proveu que no hi ha dos segments d'aquests que formin un angle de $45°$.

Fem el mateix amb els punts (m, n, k) de l'espai. Hi haurà algun parell de segments que formin un angle de $45°$?

27E2.–Siguin a i b enters diferents de 0, 1 i -1 i considerem la matriu

$$\begin{pmatrix} a+b & a+b^2 & a+b^3 & \cdots & a+b^m \\ a^2+b & a^2+b^2 & a^2+b^3 & \cdots & a^2+b^m \\ a^3+b & a^3+b^2 & a^3+b^3 & \cdots & a^3+b^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n+b & a^n+b^2 & a^n+b^3 & \cdots & a^n+b^m \end{pmatrix}.$$

Determineu un subconjunt S de files d'aquesta matriu, el més petit possible, tal que qualsevol altra fila es pugui expressar com a suma de les files de S multiplicades per nombres enters apropiats (és a dir, com a combinació lineal amb coeficients enters de les files de S.) Expliciteu aquestes combinacions lineals.

27E3.–Suposem que l'equació $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ amb $r \neq 0$, admet tres arrels reals i positives. Determineu la relació que hi ha entre els nombres reals p, q i r per tal que les tres arrels puguin ser les longituds dels costats d'un triangle.

Segona sessió. 16 de febrer de 1991.

27E4.–Siguin A', B' i C' els punts de tangència dels costats BC, CA i AB d'un triangle amb la seva circumferència incrita. Sigui D el punt d'intersecció de $C'A'$ amb la bisectriu de l'angle del vèrtex A. Calculeu el valor de l'angle $\widehat{ADC}$.

27E5.–Donat un nombre natural n, indiquem per $s(n)$ la suma de les xifres del nombre n, expressat en el sistema de numeració binari, és a dir, el nombre de xifres 1 que té. Determineu, per a tot nombre natural k

$$\sigma(k) = s(1) + s(2) + \cdots + s(2^k).$$

27E6.–Calculeu la part entera de

$$S = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}.$$

CURS 1991-92

Problemes de la XXVIII Olimpíada Matemàtica.
Primera fase (Catalunya), 1991-92

Primera sessió. 22 de Novembre de 1991, de 16 h a 20 h.

28C1.–Demostreu que el nombre que escrit en base n, $n \geq 8$ és 1367631, és un cub perfecte. En particular, calculeu l'arrel cúbica d'aquest nombre en base 10 i en base 1991.

28C2.–Sigui S el conjunt de les rectes que uneixen un punt del conjunt

$$A = \left\{ \left(0, \frac{1}{a}\right) \mid a \in \mathbb{N} \right\}$$

i un punt del conjunt

$$B = \{\ (b+1, 0)\ \mid b \in \mathbb{N}\}\,.$$

Demostreu que un nombre natural m és compost si i només si el punt $M = (m, -1)$ està sobre una recta del conjunt S.

Determineu també el nombre de rectes del conjunt S que passen per un punt $M = (m, -1)$ en funció del nombre natural m.

28C3.–L'abscissa d'un punt que es mou sobre la part positiva de l'eix de les X ve donada per

$$x(t) = 5(t+1)^2 + \frac{a}{(t+1)^5}$$

on a és una constant positiva.

Quin és el mínim valor de a pel qual $x(t) \geq 24$ per a tot $t \geq 0$?

28C4.–Tenim dues circumferències S_1, S_2 iguals, de radi R, i tangents. Considerem la tangent comuna r, paral·lela a la recta que uneix els centres de S_1 i S_2.

Siguin C_1, la circumferència tangent a r, S_1 i S_2; C_2, la circumferència tangent a C_1, S_1 i S_2; C_3, la circumferència tangent a C_2, S_1 i S_2; etc.

S'obté així una família de circumferències $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ Demostreu que el diàmetre de la circumferència C_n és

$$d_n = \frac{R}{n(n+1)}.$$

Segona sessió. 23 de Novembre de 1991, de 9 h a 13 h.

28C5.–Per cada nombre natural n escrivim

$$(1+\sqrt{2})^{2n+1} = a_n + b_n\sqrt{2}$$

i així tenim dues successions de nombres enters

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad \text{i} \quad b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

a) Demostreu que a_n i b_n són senars per tot $n \in \mathbb{N}$.

b) Demostreu que b_n és la hipotenusa d'un triangle rectangle de catets

$$\frac{a_n+1}{2} \quad \text{i} \quad \frac{a_n-1}{2}.$$

28C6.–Siguin z_1, z_2, z_3 i z_4 nombres complexos de igual mòdul;

a) si $z_1 + z_2 + z_3 . = 0$, què es pot dir de la figura formada pels afixos d'aquests tres nombres complexos?

b) si $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$, què es pot dir de la figura formada pels afixos d'aquests quatre nombres complexos ?

28C7.–Sigui $p(n)$ el nombre de factors primers del nombre natural n. Demostreu que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n} = 0.$$

28C8.–Sigui ABC un triangle qualsevol. Exteriorment a ell es construeixen dos quadrats $BAEP$ i $ACRD$ de costats AB i AC respectivament. Siguin M i N els punts mitjans de BC i ED. Demostreu que AM és perpendicular a ED i que AN és perpendicular a BC.

Problemes de la XXVIII Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya), 1991-92

Primera sessió. 14 de Febrer de 1992.

28E1.–Un nombre N, múltiple de 83, és tal que el seu quadrat té 63 divisors. Trobeu N, sabent que és el nombre més petit que compleix les condicions anteriors.

28E2.–Donades dues circumferències exteriors de radis r i r' $(r \neq r')$, es demana de dibuixar, raonadament, una recta paral·lela a una direcció donada, de tal manera que determini sobre les dues circumferències dues cordes tals que la suma de llurs longituds sigui igual a una longitud donada ℓ.

28E3.–Proveu que si a, b, c i d són nombres enters no negatius, i és

$$(a+b)^2 + 2a + b = (c+d)^2 + 2c + d, \qquad (*)$$

necessàriament ha de ser $a = c$ i $b = d$.

Proveu la mateixa conclusió si, en lloc de (*) es compleix

$$(a+b)^2 + 3a + b = (c+d)^2 + 3c + d.$$

Vegeu que, en canvi, existeixen nombres enters no negatius $a \neq c$, $b \neq d$, tals que

$$(a+b)^2 + 4a + b = (c+d)^2 + 4c + d.$$

Segona sessió. 15 de Febrer de 1992.

28E4.–Sigui la successió (progressió aritmètica)

$$3, 7, 11, 15, \ldots$$

Demostreu que en aquesta successió hi ha infinits nombres primers.

28E5.–Dibuixat el triangle de vèrtexs A, B, C, es demana de determinar gràficament el punt P tal que

$$\widehat{PAB} = \widehat{PBC} = \widehat{PCA}.$$

Expresseu una funció triginomètrica d'aquest angle $\widehat{PAB}$ en funció de les funcions trigonomètriques dels angles A, B i C.

28E6.–Donats un nombre natural $n > 0$ i un nombre complex $z = x + iy$ de mòdul unitat, $x^2 + y^2 = 1$, es pot complir o no la igualtat

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^n = 2^{n-1}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right).$$

Fixat n designarem per $S(n)$ el subconjunt de complexos de mòdul unitat pels quals es compleix la igualtat donada. Es demana

a) Calculeu raonadament $S(n)$, per $n = 2, 3, 4, 5$.

b) Fiteu superiorment el nombre d'elements de $S(n)$ en funció de n, per $n > 5$.

CURS 1992-93

Problemes de la XXIX Olimpíada Matemàtica. Primera fase (Catalunya), 1992-93

Primera sessió. 11 de Desembre de 1992, de 16 h a 18 h 30 m.

29C1.–Demostreu que el nombre combinatori

$$\binom{1992}{1492}$$

no és múltiple de 500.

29C2.–Proveu que si els nombres

$$\sin(b+c-a), \quad \sin(c+a-b) \quad \text{i} \quad \sin(a+b-c)$$

estan en progressió aritmètica, llavors també ho estan els nombres

$$\tan a, \quad \tan b \quad \text{i} \quad \tan c.$$

29C3.–En un cercle de centre O i radi 1 tracem una corda i construïm seguidament el semicercle que té com a diàmetre aquesta corda i no està contingut en el cercle inicial. Sigui P el punt d'aquest semicercle que està més lluny del punt O. Quina longitud ha de tenir la corda per tal que la distància OP sigui màxima?

Segona sessió. 12 de Desembre de 1992, de 9 h a 13 h.

29C4.–Calculeu els límits

a)

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{(n-1)n}\right).$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{(n-1)n^2}\right).$$

29C5.–Sobre una recta horitzontal construïm triangles equilàters de forma que les respectives bases són segments adjacents de longituds 1, 3, 5, 7, ... Demostreu que els vèrtexs superiors dels triangles estan sobre una paràbola.

29C6.–Un rectangle es pot descompondre en 9 quadrats de costats 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 i 18. Calculeu els costats del rectangle.

29C7.–El joc de daus americà es juga de la manera següent: el jugador va tirant successivament els daus fins que perd o guanya.

A la primera tirada guanya si la suma dels punts dels dos daus és 7 o bé 11, i perd si la suma de punts és 2, 3 o 12. Altrament anomenarem *el seu valor* la suma de punts que ha tret en la primera tirada.

A partir d'aquí tirarà els dos daus fins que tregui un 7, i llavors perdrà, o bé que tregui novament *el seu valor* i llavors guanyarà.

Calculeu la probabilitat que té un jugador de guanyar en aquest joc.

29C8.–Sigui $A=66^{66}$. Sigui B la suma de les xifres de A, i C la suma de les xifres de B. Calculeu la suma de les xifres de C.

Problemes de la XXIX Olimpíada Matemàtica. Segona fase (Espanya), 1992-93

Primera sessió. 26 de Febrer de 1993.

29E1.–En una reunió hi ha 201 persones de 5 nacionalitats diferents. Se sap que, a cada grup de 6, com a mínim 2 tenen la mateixa edat. Demostreu que hi ha al menys 5 persones del mateix país, de la mateixa edat i del mateix sexe.

29E2.–Escrit el triangle aritmètic

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & \ldots & & 1991 & & 1992 & & 1993 \\
& 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & \ldots & & & & 3983 & & 3985 & \\
& & 4 & & 8 & & 12 & & \ldots & & & & & & 7968 & & \\
& & & & \ldots & & & & \ldots & & & & \ldots & & & &
\end{array}$$

on cada nombre és igual a la suma dels dos que té al damunt (és evident que cada fila té un nombre menys que la fila anterior, i per tant, la darrera està formada per un únic nombre), raoneu el fet que l'últim nombre sigui múltiple de 1993.

29E3.–Justifiqueu raonadament que a qualsevol triangle, el diàmetre de la circumferència inscrita no és més gran que el radi de la circumferència circumscrita.

Segona sessió. 27 de Febrer de 1993.

29E4.–Demostreu que tot nombre primer p diferent de 2 i de 5 té infinits múltiples escrits només amb uns (és a dir, de la forma $111\ldots 1$).

29E5.–Es donen 16 punts que formen una quadrícula com a la figura:

$$\begin{array}{cccccc} & \circ & \circ & \circ & \bullet & D \\ & \circ & \circ & \circ & \circ & \\ & \circ & \circ & \circ & \circ & \\ A & \bullet & \circ & \circ & \circ & \end{array}$$

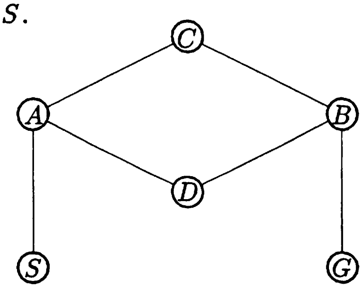
De tots ells, se n'han destacat dos: A i D. Es demana que fixeu, de totes les maneres possibles, dos altres punts B i C amb la condició que les 6 distàncies determinades pels quatre punts siguin totes diferents. En aquest conjunt de quaternes, s'ha d'estudiar:

1) Nombre de figures de 4 punts que existeixen amb les condicions de l'enunciat.

2) Figures que són geomètricament diferents, és a dir, no deduïbles una de l'altra per una transformació d'igualtat.

3) Si cada punt es designa per un parell d'enters (X_i, Y_i), la suma $|X_i - X_j| + |Y_i - Y_j|$ estesa al sis parells AB, AC, AD, BC, BD, CD, és constant.

29E6.–Una màquina de joc d'un casino té una pantalla on s'ofereix un esquema com el de la figura. En començar el joc apareix una bola al punt S.



A cada impuls del jugador, la bola es mou a cada un dels cercles immediats, amb la mateixa probabilitat per a cada un d'ells. La partida acaba quan té lloc per primera vegada un dels dos esdeveniments següents: (1) La bola torna a S, i el jugador perd. (2) La bola arriba a G, i llavors el jugador guanya. Es demana la probabilitat que el jugador guanyi, i la duració mitjana de les partides.

CURS 1993-94

Problemes de la XXX Olimpíada Matemàtica.
Primera fase (Catalunya), 1993-94

Primera sessió. 14 de Gener de 1994, de 16 h a 20 h.

30C1.–Dues circumferències C_1 i C_2 es tallen en punts A i B. Es pren un punt M de C_1, exterior a C_2, i es tracen les rectes MA i MB. Anomenem A' i B' els punts (diferents de A i de B) en què aquestes rectes tallen respectivament la circumferència C_2. Demostreu que la longitud del segment $A'B'$ no depèn de la posició de M.

30C2.–Demostreu que la funció

$$f(x) = 2 \arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

és constant en el conjunt dels nombres reals tals que $x \geq 1$.

30C3.–El nombre 9687600 es pot escriure com a producte de nombres enters consecutius, un dels quals és primer. Calculeu quins són aquests factors.

30C4.–En una bossa hi ha n boles numerades amb números de 1 a n.

a) Si traiem tres boles d'aquesta bossa, totes alhora, calculeu la probabilitat que no surti cap parella de números consecutius.

b) Si traiem m boles d'aquesta bossa, totes alhora, demostreu que la probabilitat que no surti cap parella de números consecutius és

$$\frac{\binom{n-m+1}{m}}{\binom{n}{m}}.$$

Segona sessió. 15 de Gener de 1994, de 9 h a 13 h.

30C5.–Digueu quina relació hi ha d'haver entre les arestes d'un tetràedre per tal que les seves cares siguin triangles semblants no tots iguals.

30C6.–Una successió de terme general a_n compleix $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ per a $n > 2$. Se sap que la suma dels 1000 primers termes és 500, i que la suma dels 1000 següents és 2000. Calculeu la suma dels 1993 primers termes i el terme a_{1994}.

30C7.–Sigui $P(x)$ un polinomi amb coeficients enters.

a) Comproveu que si m i n són nombres enters, llavors $P(m) - P(n)$ és divisible per $m - n$.

b) Demostreu que si hi ha tres nombres enters a, b i c tals que $P(a) = P(b) = P(c) = 2$, llavors $P(x) \neq 3$ per tot x enter.

30C8.–Calculeu totes les arrels complexes de l'equació

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0.$$

Problemes de la XXX Olimpíada Matemàtica. Segona fase (Espanya), 1993-94

Primera sessió. 25 de Febrer de 1994.

30E1.–Demostreu que si entre els infinits termes d'una progessió aritmètica de nombres enters hi ha un quadrat perfecte, llavors infinits termes de la progressió són quadrats perfectes.

30E2.–Sigui $O.XYZ$ un triedre trirectangle de vèrtex O i arestes X, Y i Z. Sobre l'aresta Z es fixa un punt C tal que $OC = c$. Sobre X i Y es consideren, respectivament, punts variables P i Q de manera que $OP + OQ$ sigui una constant donada k. Per a cada parell de punts P i Q, els quatre punts O, C, P i Q determinen una esfera, el centre de la qual W, es projecta sobre el pla OXY. Raoneu quin és el lloc geomètric d'aquesta projecció. Raoneu també quin és el lloc geomètric de W.

30E3.–Una Oficina de Turisme vol fer una enquesta sobre el nombre de dies asolellats i de dies de pluja al llarg d'un any. Per tal de fer-ho, demana informació a sis regions, les quals li transmeten la informació de la taula següent:

Regió	*Sol o pluja*	*Inclassificable*
A	336	29
B	321	44
C	335	30
D	343	22
E	329	36
F	330	35

La persona encarregada de l'enquesta, que té dades més detallades, no és imparcial. S'adona que prescindint d'una de les regions, la observació dóna un nombre de dies plujosos que és la tercera part del nombre de dies de sol. Digueu raonadament de quina regió ha de prescindir.

Segona sessió. 26 de Febrer de 1994.

30E4.–L'angle A d'un triangle isòsceles ABC mesura $2/5$ de recte, i els angles B i C són iguals. La bisectriu de l'angle C talla el costat oposat al punt D. Calculeu les mesures dels angles del triangle BCD. Expresseu la mesura a del costat BC en funció de la mesura b del costat AC, sense que a l'expressió hi aparegui cap raó trigonomètrica.

30E5.–Amb 21 fitxes de dames, unes de blanques i unes de negres, es forma un rectangle 3×7. Demostreu que sempre hi ha quatre fitxes del mateix color situades en els vèrtexs d'un rectangle.

30E6.–Un polígon convex de n costats es descompon en m triangles amb interiors disjunts, de manera que cada costat d'aquests m triangles ho és també d'altre triangle contigu o del polígon donat. Demostreu que $m+n$ és parell. Coneguts m i n, trobeu el nombre de costats diferents que queden a l'interior del polígon i el nombre de vèrtexs diferents que queden en aquest interior.

CURS 1994-95

Problemes de la XXXI Olimpíada Matemàtica. Primera fase (Catalunya), 1994-95

Primera sessió. 13 de Gener de 1995, de 16 h a 20 h.

31C1.–Donat un triangle isòsceles de base 2 i altura 2, trobeu les paràboles tangents als costats iguals del triangle isòsceles tals que l'àrea que tanquin amb la base del triangle sigui màxima i mínima.

31C2.–Sigui $N = abc_{(n}$ un nombre escrit en el sistema de numeració de base n, on $0 \leq a, b, c \leq n-1$ i on a, b, c són diferents entre ells i de zero. Formeu els nombres en base n que s'obtenen permutant de totes les maneres possibles les xifres a, b, c. Demostreu que la suma d'aquests nombres és divisible per $111_{(n}$. Generalitzeu l'enunciat del problema a nombres de p xifres escrits en base n.

31C3.–Donat un triangle ABC i un punt M sobre AC, busqueu un punt N en un dels altres costats de manera que el segment MN divideixi el triangle en dues parts que tinguin la mateixa àrea.

31C4.–Tenim dos daus perfectes normals. Volem canviar les puntuacions de cadascuna de les cares dels dos daus de manera que les probabilitats d'aconseguir els resultats 2 a 12, llançant-los simultàniament, sigui la mateixa que s'esdevindria usant els dos daus donats inicialment. A les noves puntuacions dels daus es permet la repetició d'una mateixa puntuació en dues cares, així com la utilització de puntuacions superiors al 6, però no s'accepta pas el 0. És possible de fer això?

Segona sessió. 14 de Gener de 1995, de 9 h a 13 h.

31C5.–Siguin $[a,b]$ i $[c,d]$ dos intervals tancats de $\mathbb{R}$. Siguin $x_0, x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_n$ nombres reals que compleixen

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d.$$

Proveu que si cadascun dels n^2 rectangles de $\mathbb{R}^2$

$$[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \quad (0 \le i, j \le n-1)$$

té un costat de longitud entera, llavors el rectangle gran $[a,b] \times [c,d]$ també té un costat de longitud entera.

31C6.–Siguin A, B i C els tres angles d'un triangle.

a) Demostreu que es compleix la igualtat

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C.$$

b) Suposeu que tres arrels de l'equació polinòmica

$$x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$$

són $\tan A$, $\tan B$ i $\tan C$, on A, B i C són els tres angles d'un triangle. Busqueu la quarta arrel en funció solament dels coeficients p, q, r, s del polinomi.

31C7.–Busqueu una fórmula general que permeti conèixer còmodament les hores en les quals la busca horària d'un rellotge i la minutera formen un angle recte. Comproveu aquesta fórmula general per a les 3 i les 9 hores.

31C8.–Sigui $ABCD$ un rectangle, dividim el costat AB en p parts iguals i el costat AD en q parts iguals, amb p, q enters senars, i considerem la quadrícula resultant.

a) Calculeu el nombre de camins de longitud mínima per la quadrícula que van del vèrtex A al seu vèrtex oposat C.

b) Cadascun d'aquests camins tanca amb els costats AB i BC una certa àrea. Calculeu la suma d'aquestes àrees.

c) Si m és la mitjana aritmètica d'aquestes àrees, es demana quants camins tanquen aquesta àrea m.

Problemes de la XXXI Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya, celebrada a Castelló), 1994-95

Primera sessió. 24 de febrer de 1995, de 16 h a 20 h.

31E1.–Es consideren conjunts A de cent nombres naturals diferents, que tinguin la propietat que si a, b, c són elements qualssevol (iguals o diferents) de A, existeix un triangle no obtusangle els costats del qual mesuren a, b i c unitats.

S'anomena $S(A)$ la suma dels perímetres considerats a la definició de A. Calculeu el valor mínim de $S(A)$.

31E2.–Retallem diversos cercles de paper (no necessàriament iguals) i els estenem sobre una taula de manera que n'hi hagi alguns de superposats (amb part interior comuna), però de tal forma que no hi hagi cap cercle dins d'un altre.

Proveu que és impossible engalzar les peces que resulten de retallar les parts no superposades i compondre amb elles cercles disjunts.

31E3.–Pel baricentre G d'un triangle ABC es traça una recta que talla el costat AB en P i el costat AC en Q. Demostreu que

$$\frac{PB}{PA}\cdot\frac{QC}{QA}\le\frac{1}{4}.$$

Segona sessió. 25 de febrer de 1995, de 10 h a 13 h.

31E4.–Trobeu les solucions enteres de l'equació

$$p(x+y) = xy$$

on p és un nombre primer.

31E5.–Demostreu que en cas que les equacions

$$x^3 + mx - n = 0$$

$$nx^3 - 2m^2x^2 - 5mnx - 2m^3 - n^2 = 0$$

($n \neq 0$), tinguin una arrel comuna, la primera tindrà dues arrels iguals, i determineu llavors les arrels de les dues equacions en funció de n.

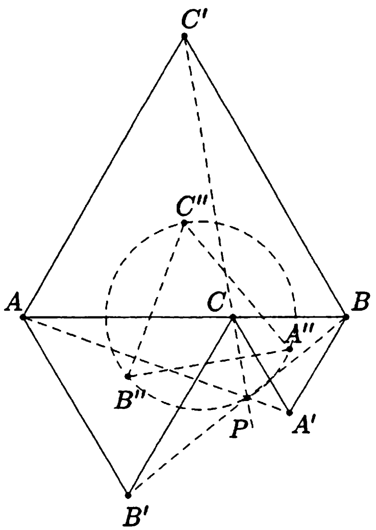
31E6.–A la figura, AB és un segment fix i C un punt variable dins d'ell. Es construeixen triangles equilàters ACB' i CBA' de costats AC i CB en un mateix semiplà definit per AB, i un altre triangle equilàter ABC' de costat AB en el semiplà oposat. Demostreu:

a) Les rectes AA', BB' i CC' són concurrents.

b) Si anomenem P el punt comú a les tres rectes del punt a), trobeu el lloc geomètric de P quan C varia en el segment AB.

c) Els centres A'', B'' i C'' dels tres triangles formen un triangle equilàter.

d) Els punts A'', B'', C'' i P són concíclics.



CURS 1995-96

Problemes de la XXXII Olimpíada Matemàtica. Primera fase (Catalunya), 1995-96

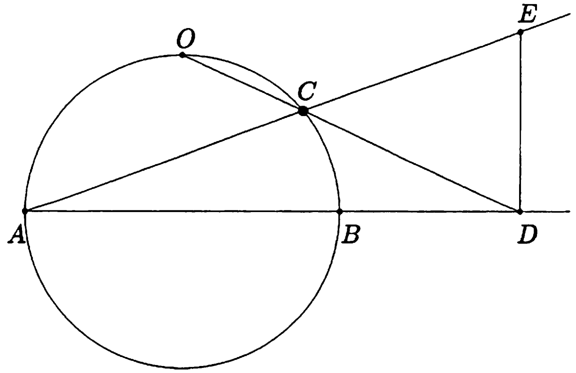
Primera sessió. 15 de Desembre de 1995, de 16 h a 20 h.

32C1.–Un cert professor de matemàtiques va escriure a la pissarra un polinomi $f(x)$ amb coeficients enters i va dir: "Si al polinomi substituïm x per l'edat del meu fill, que acaba de fer a anys, obtenim la igualtat $f(a) = a$. A més, $f(0) = p$ és un nombre primer més gran que a." Quants anys té el fill del professor?

32C2.–Sigui n un nombre natural. Trobeu el nombre més gran k tal que en el conjunt $\{1, 2, \ldots, n\}$ poguem agafar un subconjunt A de k nombres que compleixi que si x, y, z són nombres qualssevol de A, sempre sigui $x + y \neq z$.

32C3.–Escollim un nombre natural n i demanem a r persones que escriguin un subconjunt de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Quina és la probabilitat que els r subconjunts obtinguts siguin disjunts dos s dos?

32C4.–Sigui AB el diàmetre d'una circumferència, O el punt mig d'un dels arcs que van de A a B, i C un punt qualsevol de l'arc OB. Dibuixem les rectes AC, OC, i sigui D la intersecció de OC amb AB. Sigui DE perpendicular a AD i E la seva intersecció amb AC. Demostreu que els segments BD i DE tenen la mateixa longitud.



Segona sessió. 16 de Desembre de 1995, de 9 h a 13 h.

32C5.–Calculeu un nombre de sis xifres sabent que passant-ne l'última al davant queda dividit per 3.

32C6.–Calculeu el màxim comú divisor de

$$\binom{n}{k}, \binom{n+1}{k}, \dots, \binom{n+k}{k},$$

on n i k són nombres naturals, $n \geq k$.

32C7.–Demostreu que si un polígon inscrit en una circumferència de radi r té costats de longituds ℓ_1, ℓ_2, ... , ℓ_n, es compleix

$$\ell_1^2 + \ell_2^2 + \cdots + \ell_n^2 \leq 9r^2.$$

Determineu per quins polígons hi ha igualtat.

32C8.–Donat un nombre natural n, sigui $p(n)$ el producte de les seves xifres. Demostreu que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n} = 0.$$

Problemes de la XXXII Olimpíada Matemàtica.
Segona fase (Espanya, celebrada a Tarragona), 1995-96

Primera sessió. 22 de febrer de 1996, de 16 h a 20 h.

32E1.–Els nombres naturals a i b són tals que

$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$$

és un enter. Demostreu que el màxim comú divisor de a i b no és més gran que $\sqrt{a+b}$.

32E2.–Sigui G el baricentre del tringle ABC. Demostreu que si

$$AB+GC=AC+GB,$$

llavors el triangle és isòsceles.

32E3.–Siguin a, b, c tres nombres reals. Es consideren les funcions

$$f(x)=ax^2+bx+c \qquad \text{i} \qquad g(x)=cx^2+bx+a.$$

Sabent que

$$|f(-1)|\leq 1, \quad |f(0)|\leq 1, \quad \text{i} \quad |f(1)|\leq 1,$$

proveu que si $-1\leq x\leq 1$, aleshores $|f(x)|\leq 5/4$ i $|g(x)|\leq 2$.

Segona sessió. 23 de febrer de 1996, de 10 h a 13 h.

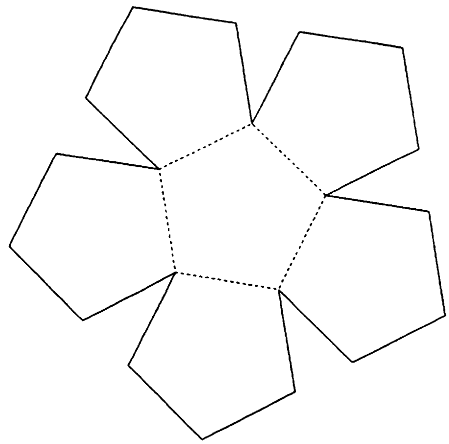
32E4.–Discutiu l'existència de solucions reals x de l'equació

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$$

segons els valors reals del paràmetre p, i resoleu-la en els casos que tingui solució.

32E5.–A *Port Aventura* hi ha 16 agents secrets. Cada un d'ells vigila algun dels seus col·legues. Se sap que si l'agent A vigila l'agent B, aleshores B no vigila A. Sabem també que 10 agents qualssevol poden ser numerats de manera que el primer vigila el segon, aquest vigila el tercer, ... , el desè vigila el primer. Demostreu que també es poden numerar d'aquesta manera 11 agents qualssevol.

32E6.–La figura adjunta es compon de sis pentàgons regulars de costat un metre. Es doblega per la línea de punts fins que coincideixen les arestes no puntejades que es tallen en un vèrtex. Quin volum d'aigua hi cap, al recipient així format?



CURS 1994-95

Problemes de la XXXIII Olimpíada Matemàtica. Primera fase (Catalunya), 1996-97

Primera sessió. 13 de Desembre de 1996, de 16 h a 20 h.

33C1.–Amb dos filferros de 1996 cm de llarg cadascun, dos filferros de 1997 cm de llarg cadascun i dos filferros de 1998 cm de llarg cadascun, es construeix un tetràedre de manera que les sis arestes resulten ser tangents a una esfera. Raoneu en quina posició relativa hem situat les arestes.

33C2.–Un rellotger molt de la broma té a l'aparador de la seva botiga un rellotge amb les dues busques — la *minutera* i l'*horària* — exactament iguals. Una persona que s'hi fixi una mica, quasibé sempre pot deduir quina és la busca horària i quina la minutera, i deduir, doncs, quina hora és. Tanmateix, però, en alguns casos això no és possible. Si en aquests casos s'escull a l'atzar una busca con a horària i l'altra com a minutera, i l'elecció és incorrecta, es cometrà un error en la lectura de l'hora. La diferència més curta entre l'hora llegida i l'hora real no por ser en cap cas superior a les 6 hores.

a) Descriviu les situacions en què no es pot saber quina hora és.

b) Estudieu quin és el màxim error que es pot arribar a cometre i a quines hores es produeix aquest error màxim.

33C3.–En una bossa hi ha n boles blanques numerades de 1 a n, n boles vermelles numerades de 1 a n, n boles blaves numerades de 1 a n i n boles groques numerades de 1 a n, essent $n \geq 4$. Es treuen 4 boles d'aquesta bossa totes alhora. Esudieu, segons els valors de n, quins dels esdeveniments següents és més difícil que tingui lloc, és a dir, té una probabilitat més petita:

$$A = \{\textit{treure les quatre boles del mateix color}\}$$

$$B = \{\textit{treure quatre boles amb números correlatius}\}$$

$$C = \{\textit{treure tres boles d'un mateix número i l'altra no}\}.$$

33C4.–Sigui $\mathcal{C}$ un con recte de radi r i altura h. Sigui V el vèrtex del con i AB un diàmetre de la base circular de centre O. Els plans $\mathcal{P}$ paral·lels a la generatriu VA del con que tallen la base circular segons cordes MN perpendiculars a AB, tallen la superfície cònica segons una paràbola. Trobeu la distància d de la corda MN al centre O per tal que l'àrea de la intersecció de $\mathcal{P}$ amb $\mathcal{C}$ sigui màxima.

Segona sessió. 14 de Desembre de 1996, de 9 h a 13 h.

33C5.–Al pla definim un sistema de coordenades rectangulars. Calculeu l'àrea del recinte solució del sistema d'inequacions següent:

$$\begin{cases} |\sqrt{3}y - x| \leq 2x \\ x^2 + y^2 \quad \leq 2x. \end{cases}$$

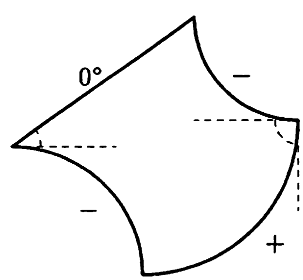
33C6.–Busqueu els nombres complexos α tals que els afixos dels nombres α, α^2, α^3, α^4 siguin els vèrtexs d'un trapezi.

33C7.–Hi ha una fórmula que dóna l'àrea A d'un triangle del pla que té els vèrtexs situats en punts de coordenades enteres com a funció lineal $A = aI + bC + dV$, on I representa el nombre de punts de coordenades enteres que són interiors al triangle; C el nombre dels que queden situats sobre els costats del triangle; i $V = 3$ és el nombre de vèrtexs de coordenades enteres. Deduïu-la, a partir de l'anàlisi d'alguns exemples, i demostreu-la.

33C8.–Anomenarem *polígon mixtilini* una regió tancada del pla limitada per *costats* que poden ser segments o arcs de circumferència. Els *angles* del polígon mixtilini es mesuren en graus i són, en cada vèrtex, els que determinen els costats (cas que siguin segments), o les tangents traçades pel vèrtex als costats que siguin arcs.

Els *costats* del polígon es mesuren també en graus, de la manera següent:

1) segments: $0°$.
2) arcs amb la concavitat cap a l'interior del polígon: els graus que mesura l'arc, comptats positius.
3) arcs amb la concavitat cap a l'exterior del polígon: els graus que mesura l'arc, comptats negatius.
L'esquema il·lustra la manera de mesurar els costats i els angles d'un polígon mixtilini.



a) Demostreu que si en un polígon de n costats els angles són $A_1, A_2, \dots A_n$ i els costats són $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, llavors es compleix

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + (n-2)\,180°.$$

b) Demostreu que si els tres costats d'un *triangle mixtilini* tenen un punt en comú que no és un vèrtex, llavors $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

c) Si tenim un *angle mixtilini* A inscrit en una circumferència, calculeu A en funció dels costats α, β i γ del triangle que queda determinat a la circumferència.

Problemes de la XXXIII Olimpíada Matemàtica. Segona fase (Espanya, celebrada a València), 1996-97

Primera sessió. 7 de Març de 1997, de 16 h a 20 h.

33E1.–Calculeu la suma dels quadrats dels cent primers termes d'una progressió aritmètica sabent que la suma de tots els termes val -1, i la suma dels que ocupen el lloc parell val $+1$.

33E2.–Un quadrat de costat 5 es divideix en 25 quadrats unitat per mitjà de rectes paral·leles als costats. Sigui A el conjunt dels 16 punts interiors, que són vèrtexs dels quadrats unitat, però que no estan en els costats dels quadrat inicial.

Digueu quin és el més gran nombre de punts de A que es poden elegir de manera que *tres* qualssevol d'ells *no* siguin vèrtexs d'un triangle rectangle isòsceles.

33E3.–Es consideren les paràboles $y = x^2 + px + q$ que tallen els eixos de coordenades en tres punts diferents, pels quals es fa passar una circumferència. Demostreu que totes les circumferències traçades en variar p i q a $\mathbb{R}$ passen per un punt fix, que cal determinar.

Segona sessió. 8 de Març de 1997, de 9 h a 13 h.

33E4.–Sigui p un nombre primer. Determineu tots els enters $k \in \mathbb{Z}$ tals que $\sqrt{k^2 - pk}$ és un enter positiu.

33E5.–Demostreu que en un quadrilàter convex d'àrea unitat, la suma de les longituds de tots els costats i diagonals no és menor que $2(2+\sqrt{2})$.

33E6.–Un cotxe ha de fer una volta completa a un circuit circular. La quantitat exacta de benzina que necessita està distribuïda en dipòsits fixos situats en n punts diferents qualssevol del circuit. Inicialment el dipòsit del cotxe està buit. Demostreu que qualsevol que sigui la distribució del combustible als dipòsits, sempre existeix un punt de sortida de forma que es pugui fer una volta completa.

Aclariments:

Se suposa que el consum és uniforme i proporcional a la distància.

El dipòsit del cotxe té capacitat suficient per tota la benzina.